The dual side of the Classical Test Theory

Danny Avello[a] Ernesto San Martín[b,c,d]

[a] Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[b] Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[c] Centro de Medición MIDE UC, Chile
[d] Center for Operations Research and Econometrics (CORE), Bélgica

17 de noviembre de 2017

La Teoría Clásica de Test (TCT) comúnmente se escribe:

$$y_{ij} = T_i + e_{ij}$$

Ocupando la axiomatización de Lord y Novick (1968)

$$y_{ij} = E(y_{ij}|\theta_i)_i + \Big(y_{ij} - E(y_{ij}|\theta_i)\Big)$$

Teoría Clásica de Test

Ocupando la axiomatización de Lord y Novick (1968)

$$y_{ij} = E(y_{ij}|\theta_i)_i + \Big(y_{ij} - E(y_{ij}|\theta_i)\Big)$$

El objetivo principal en psicometría es conocer cuanto sea posible de θ_i a partir de y_{ij}.

Confiablidad

Un concepto de gran relevancia en este marco teórico es Confiabilidad

$$\eta = \frac{Var\left[E(y_{ij} \mid \theta_i)_+\right]}{Var(y_{+j})}$$

Se espera que la fracción de la varianza de y_{ij} explicada por la varianza de los puntajes verdaderos sea lo más cercana a 1 posible.

Espacio de Hilbert

Para entender mejor el rol de la variable latente ocupamos Espacios de Hilbert.
Un Espacio de Hilbert es una espacio de producto interno completo respecto de la norma inducida por su producto interno:

- Se pueden medir ángulos

Espacio de Hilbert

Para entender mejor el rol de la variable latente ocupamos Espacios de Hilbert.
Un Espacio de Hilbert es una espacio de producto interno completo respecto de la norma inducida por su producto interno:

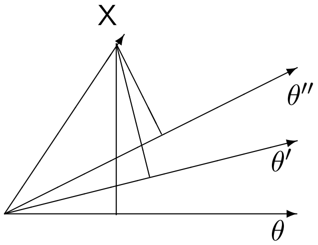
- Se pueden medir ángulos
- Existe una norma

Espacio de Hilbert

Para entender mejor el rol de la variable latente ocupamos Espacios de Hilbert.

Un Espacio de Hilbert es una espacio de producto interno completo respecto de la norma inducida por su producto interno:

- Se pueden medir ángulos
- Existe una norma



Trabajaremos en :

$$Y_j, \Theta \in L^2(M, \mathcal{M}, \mathcal{P})$$
$$= \{f : (M, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \text{ es una v.a.: } E(|f^2| < \infty)$$

Donde j es el j-ésimo test.

Producto interno y Esperanza de un producto

En nuestro espacio la esperanza de un producto es un producto ($E(xy) = \langle x, y \rangle$) porque:

- Simetría: $E(xy) = E(yx)$
- Lineal en el primer argumento: $E(axy) = aE(xy)$ y $E((x + y)z) = E(xz) + E(yz)$

La esperanza condicional es una proyección ortogonal

Es una proyección ortogonal en el sentido:

- $\|x - E(x|z)\|^2 = E(x - E(x|z))^2 \leq E(x - \Psi(z)))^2$
- Y $E(x|z) = E\left[E(x|z)|z\right]$

Generalización del concepto Confiabilidad

Note que

$$Cov(y_+, E(y_{ij}|\theta_i)_+) = Var\left[E(y_{ij}|\theta_i)_+\right]$$

y asumiendo $E(\cdot) = 0$ se obtiene:

$$\eta = \frac{\left[Cov\left[y_{+j}, E(y_{ij}|\theta_i)_+\right]\right]^2}{Var(y_{+j})\, Var\left[E(y_{ij}|\theta_i)_+\right]}$$

$$\eta = \frac{\left[E\left[y_{+j}E(y_{ij}|\theta_i)_+\right]\right]^2}{E(y_{+j})^2 E\left[E(y_{ij}|\theta_i)_+\right]^2}$$

$$\eta = \frac{\langle y_{+j}, E(y_{ij}|\theta_i)_+\rangle^2}{\|y_{+j}\|^2 \|E(y_{ij}|\theta_i)_+\|^2}$$

Por definición η es el $cos^2\alpha$ donde α es el ángulo entre $spam(y_{+j})$ $spam(\theta_+)$, i.e los sub-espacios generados desde θ (Θ) e y_{ij} (Y_j).

El Dual

También podemos realizar la descomposición

$$\theta_i = E(\theta_i|y_{ij})_i + \left[\theta_i - E(\theta_i|y_{ij})\right]$$

Y si consideramos dos medidas:

$$\theta_i = E(\theta_i|y_{i1}, y_{i2})_i + \left[\theta_i - E(\theta_i|y_{i1}, y_{i2})_i\right]$$

El Dual

También podemos realizar la descomposición

$$\theta_i = E(\theta_i|y_{ij})_i + \left[\theta_i - E(\theta_i|y_{ij})\right]$$

Y si consideramos dos medidas:

$$\theta_i = E(\theta_i|y_{i1}, y_{i2})_i + \left[\theta_i - E(\theta_i|y_{i1}, y_{i2})_i\right]$$

$$\theta_i = E(\theta_i|y_{i1})_i + \left[E(\theta_i|y_{i1}, y_{i2})_i - E(\theta_i|y_{i1})_i\right] + \left[\theta_i - E(\theta_i|y_{i1}, y_{i2})_i\right]$$

Entonces la confiabilidad con dos medidas puede ser escrita como

$$\underbrace{\frac{Var[E(\theta_i|y_{i1}, y_{i2})]_+}{Var(\theta_+)}}_{\eta_{\theta|y_1,y_2}} =$$

$$\underbrace{\frac{Var[E(\theta_i|y_{i1})_+]}{Var(\theta_+)}}_{\eta_{\theta|y_1}} + \underbrace{\frac{Var[E(\theta_i|y_{i1}, y_{i2})_+ - E(\theta_i|y_{i1})_+]}{Var(\theta_+)}}_{\geq 0}$$

Entonces la confiabilidad con dos medidas puede ser escrita como

$$\underbrace{\frac{Var[E(\theta_i|y_{i1},y_{i2})]_+}{Var(\theta_+)}}_{\eta_{\theta|y_1,y_2}} =$$

$$\underbrace{\frac{Var[E(\theta_i|y_{i1})_+]}{Var(\theta_+)}}_{\eta_{\theta|y_1}} + \underbrace{\frac{Var[E(\theta_i|y_{i1},y_{i2})_+ - E(\theta_i|y_{i1})_+]}{Var(\theta_+)}}_{\geq 0}$$

Por lo tanto

$$\eta_{\theta|y_1,y_2} > \eta_{\theta|y_1}$$

Cambio de Notación

Con el fin de simplificar la escritura se puede cambiar la notación. $E(\cdot|\cdot)$ es una proyección ortogonal desde un vector hacia un subespacio. Podemos definir como Y_1 e Y_2 los sub-espacios que contienen las observaciones y_{i1} e y_{i2} respectivamente; y Θ es el subespacio formado por los elementos θ_i.
Entonces

$$\Theta \subset H; \quad Y_1 \subset H; \quad Y_2 \subset H$$

Por definición Θ es un splitting subspace respecto de Y_1 e Y_2 si $Y_1 \perp Y_2|\Theta$ (Lindquist et.al, 1979)
Donde la ortogonalidad condicional se entiende como

$$\langle y_{i1} - E(y_{i1}|\Theta), y_{i2} - E(y_{i2}|\Theta)\rangle = 0$$

Se puede demostrar que encontrar todos los minimal splitting subspace es equivalente a encontrar todos los splitting subspace que cumplen:

$$\Theta \cap Y_1^{\perp} = 0$$
$$\Theta \cap Y_2^{\perp} = 0$$

Entonces bajo la versión débil del axioma de independencia (DAIL) local se cumple que:

$$\Theta \cap Y_j^{\perp} = 0, \quad j = 1, 2$$

Observe que si definimos

$$\Theta` = \{\, \theta \in \Theta \mid E(\theta | Y_j) = 0 \,\}, \quad j = 1, 2$$

Entonces bajo DAIL el único elemento en el kernel del estimador de bayes es el cero.

Ontología de la variable latente

Una pregunta muy válida de realizarse es si la variable latente θ es no observada o no observable.

Ontología de la variable latente

Una pregunta muy válida de realizarse es si la variable latente θ es no observada o no observable.Se puede demostrar que bajo DAIL

$$Y_2 \subset \Theta \subset (Y_2 \vee Y^{\square}) \oplus Y_0^{\perp}$$

Donde $Y^{\square} := E(Y_1|Y_2) \vee E(Y_2|Y_1)$ e $Y_0 := Y_1 \vee Y_2$

Utilizando la descomposición ortogonal

$$X = \bar{E}(Z|X) \oplus (A \cap Z^{\perp})$$

Y bajo DAIL la teoría clásica de test para dos mediciones puede ser escrita como:

$$y_{i1} = \theta_i + e_{i1}$$

$$y_{i2} = \theta_i + e_{i2}$$

Donde e indica el término error.

Gracias