

Estabilidad a priori de sistemas de asignación a escuelas mediante loterías

Seminario de Estadística Educacional

Rodrigo Vargas

¹Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

²LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

25 de junio de 2018



Laboratorio
Interdisciplinario de
Estadística Social

- 1 Contexto Internacional
- 2 El caso Chileno
- 3 El Algoritmo de aceptación diferida fraccional (FDA)

- En 1964 los matemáticos y economistas David Gale y Lloyd Shapley publican el paper "La admisión en los colegios y la estabilidad del matrimonio".



- El objetivo de los autores es asignar recursos (cupos en colegios o parejas en el matrimonio) de forma estable y óptima (o eficiente).

Ejemplo de asignación de parejas

Supongamos que tenemos 4 hombres y 4 mujeres que se conocen:

- Andrés
- Byron
- Carlos
- Daniel
- Wendy
- Xena
- Yvette
- Zoe

Las preferencias de cada grupo son las siguientes

A	W	X	Y	Z	W	B	D	C	A
B	Y	X	W	Z	X	C	A	D	B
C	W	Y	X	Z	Y	B	C	D	A
D	X	Z	W	Y	Z	A	B	D	C

- En el año 1982 el economista Alvin Roth escribe el artículo "La economía de la asignación: Estabilidad e incentivos".



- En esta publicación Roth muestra que no existe un mecanismo estable y eficiente.

- Shapley y Roth recibieron el premio Nobel de economía en 2012.
- Tras la decisión del Tribunal de Apelaciones de los EE.UU en 1987, el distrito escolar de Boston introdujo la posibilidad de elección para las escuelas públicas al relajar la política de zonificación obligatoria.
- En 1989, Boston optó por un centro de información centralizado, ahora comunmente denominado el mecanismo de Boston. Actualmente la literatura enfatiza los graves efectos asociados al mecanismo de Boston, principalmente por no ser prueba de estrategias.
- Finalmente Boston y New York adoptaron el algoritmo de asignación diferida (AAD) de Gale-Shapley.

- En el caso chileno, se adoptó el algoritmo de aceptación diferida de Gale-Shapley (AAD).
- En todo mecanismo de asignación es deseable tener 3 propiedades:
 - 1 Estabilidad
 - 2 Eficiencia
 - 3 A prueba de estrategias.

Para que una asignación sea estable no debe existir ningún par colegio-alumno, al que llamaremos (x, z) , para el cual se cumpla simultáneamente que:

- El alumno z prefiera al colegio x al colegio que fue asignado.
- El colegio x prefiera al alumno z antes que a alguno de los alumnos que le fueron asignados.

Si estas condiciones se dieran simultáneamente para algún par colegio-alumno, entonces la asignación no sería estable pues ambas partes acordarían el cambio y mejorar su estado actual.

- En el caso del mecanismo de Aceptación diferida, se asegura que se obtiene una asignación estable, siempre y cuando tanto los colegios como los alumnos tengan preferencias estrictas sobre alumnos y colegios respectivamente.
- En el caso chileno, los colegios son indiferentes a los alumnos que postulan, ya que no pueden seleccionar ni ordenar a los alumnos según algún criterio arbitrario, es decir, si bien se cumple que los alumnos tienen preferencias estrictas sobre los colegios, estos últimos tienen a los alumnos empatados en su lista de prioridades.
- Para solucionar este problema, se utiliza el mecanismo de Generación de Números Aleatorios para romper los empates de cada colegio sobre sus postulantes. De esta forma, se puede aplicar el mecanismo de Aceptación Diferida y encontrar una asignación estable bajo los números aleatorios obtenidos.

- La eficiencia se logra, cuando en una asignación óptima, no hay grupos de alumnos que puedan intercambiar su asignación haciendo que la nueva asignación mejore a alguno de ellos y no empeore al resto de los alumnos.
- En general, para el mecanismo de Aceptación Diferida, la asignación no es eficiente desde el punto de vista de los alumnos, y esta ineficiencia es el costo de tener un mecanismo a prueba de estrategia y que entregue una asignación estable.

- Este concepto se refiere al hecho de que, dado el mecanismo de asignación, la mejor estrategia que tienen los postulantes para quedar en colegios de su preferencia es declarar sus verdaderas preferencias al postular.
- Esta es una propiedad muy deseable del mecanismo ya que incentiva a las personas a postular diciendo la verdad, lo cual hace que su postulación sea independiente de las postulaciones o creencias que se tengan sobre los demás postulantes.

Ejemplo. AAD no es eficiente.

Considere el problema de asignación de 3 estudiantes $\{1, 2, 3\}$ y tres escuelas $\{a, b, c\}$ con prioridades:

P_1	P_2	P_3	\succsim_a	\succsim_b	\succsim_c
b	a	a	1	2	3
a	b	b	3	1	1
c	c	c	2	3	2

Resultado: $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{bmatrix}$

No es eficiente la asignación $\mu' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & c \end{bmatrix}$ es mejor para los alumnos.

Un problema de asignación de escuela (I, C, q, P, \succsim) .

- Conjunto finito de estudiantes $I = \{1, 2, 3, \dots, |I|\}$
- Conjunto finito de escuelas $C = \{a, b, c, \dots, |C|\}$
- Cuotas (asientos) de escuelas q_c con $c \in C$.
- Perfil de preferencias estricto de los estudiantes P_i con $i \in I$.
- Estructura de prioridad débil de las escuelas \succsim_c con $c \in C$.

Una asignación aleatoria es una matriz $\rho = (\rho_{i,c})$ tal que

- 1 para todo i, c se tiene $\rho_{i,c} \in [0, 1]$
- 2 para todo $i, \sum_c \rho_{i,c} = 1$
- 3 para todo $c, \sum_i \rho_{i,c} = q_c$

Una lotería es una distribución de probabilidad sobre las asignaciones.

¿Cuál es la conexión entre loterías y coincidencias aleatorias? Cada lotería induce una coincidencia aleatoria. ¿Qué hay de lo contrario?

Teorema. (Birkhoff-Von Neumann)

Dada cualquier asignación aleatoria existe una lotería que la induce.

Propiedades deseables de mecanismos/asignaciones aleatorias

- Decimos que una asignación aleatoria causa envidia justificada a priori de $i \in I$ hacia el estudiante $j \in I$ con $i \succ_c j$ para $c \in C$ si $\rho_{i,a} > 0$ para algún $cP_{i,a}$ y $\rho_{j,c} > 0$.
- Esta noción estipula que, al ser el estudiante de mayor prioridad, se le debe otorgar toda la oportunidad de inscripción en la escuela c , si así lo desea, antes de que el estudiante j tenga alguna oportunidad en esta escuela,
- Decimos que una asignación aleatoria induce discriminación a priori si $i \sim_c j$ para $c \in C$ si $\rho_{i,a} > 0$ para algún $cP_{i,a}$ y $\rho_{i,c} < \rho_{j,c}$.
- Dado que los estudiantes i y j tienen la misma prioridad para la escuela c , sería natural asignar a los dos estudiantes a esta escuela con la misma probabilidad.

Ejemplo. AAD. ($q = (1, 1, 1, 2)$)

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	ζ_a	ζ_b	ζ_c	ζ_d
c	a	c	b	b	5	4,5	1,3	⋮
a	d	d	d	a	1	⋮	⋮	⋮
d	⋮	⋮	⋮	⋮	2	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮				

El mecanismo AAD da:

$$\frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ d & d & c & b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & d & c & d & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ c & d & d & b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ c & a & d & d & b \end{bmatrix} \right)$$

1 tiene enviada justificada a priori al estudiante 2 por la escuela a .

P_1	P_2	P_3	λ_a	λ_b	λ_c
a	a	b	3	2	2
b	c	a	1,2	1	1
c	b	c	\vdots	3	3

El mecanismo AAD da:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & c & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

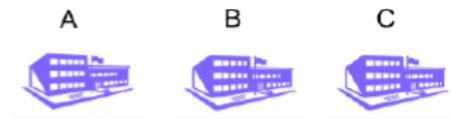
Hay discriminación a priori entre los estudiantes 1 y 2 por la escuela a .

- Paso 1
 - Cada estudiante aplica a su escuela favorita.
 - Cada escuela c considera sus solicitantes. Si el número total de solicitantes es mayor que q_c (cuota), entonces los solicitantes se asignan tentativamente a la escuela c uno por uno comenzando por los de mayor prioridad, de modo que a los estudiantes de prioridad igual, si se les asigna una fracción de un asiento en esta escuela, se les asigna una fracción igual. Los solicitantes no asignados (posiblemente, algunos son una fracción de un estudiante) son rechazados.

- Paso k
 - Cada alumno, que tiene una fracción rechazada del paso anterior, aplica a la siguiente mejor escuela que aún no ha rechazado ninguna fracción de la suya.
 - Cada escuela c considera a sus solicitantes provisionalmente asignados junto con los nuevos solicitantes. Las fracciones de los solicitantes se asignan tentativamente a la escuela c , comenzando por las de mayor prioridad, de modo que a los estudiantes de prioridad igual si se les asigna una fracción de un asiento en esta escuela, se les asigna una fracción igual. Los solicitantes no asignados (posiblemente, algunos son una fracción de un estudiante) son rechazados.
- Continuamos hasta que no se asigna ninguna fracción de un estudiante. En este punto, finalizamos el algoritmo al hacer que todas las asignaciones tentativas sean permanentes.

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1



Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

Paso 1

A	B	C
		
1	2, 3	

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C

A	B	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

Paso 1

A	B	C
		
1	2,3	

Red arrows point from the crossed-out '2,3' to '1/2' below '2' and '1/2' below '3'.

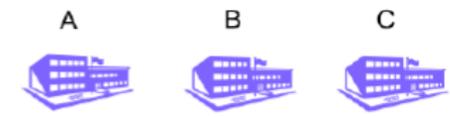
Ejemplo: Aceptación diferida fraccional



A	B	B
B	C	A
C	A	C



1,3	1	3
2	2,3	2
		1



Paso 1

1

~~2, 3~~

Paso 2

1, 3
 $\frac{1}{2}$

2, 3
 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

2
 $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C

A	B	C
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

Paso 1

Paso 2

A	B	C
		
1	2, 3	
1, 3 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3	
Paso 2	1, 3 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3	
Paso 2	1, 3 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 2, 3	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	$\frac{1}{2}$ 1, 3	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	$\frac{1}{2}$ 1, 3	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3	
Paso 2	1, 3 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 2, 3	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	$\frac{1}{2}$ 1, 3	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	$\frac{1}{2}$ 1, 3	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2,2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3	
Paso 2	1, 3 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 2, 3	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	$\frac{1}{2}$ 1, 3	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	$\frac{1}{2}$ 1, 3	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{3}{4}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3	
Paso 2	1, 3 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 2, 3	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	$\frac{1}{2}$ 1, 3	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	$\frac{1}{4}$ 3, 1, 3	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{3}{4}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3	
Paso 2	1, 3 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 2, 3	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	$\frac{1}{2}$ 1, 3	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{3}{4}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3	
Paso 2	1, 3 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 2, 3	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	$\frac{1}{2}$ 1, 3	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{3}{4}$
Paso 5	$\frac{1}{2}$ 1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3	
Paso 2	1, 3 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 2, 3	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	$\frac{1}{2}$ 1, 3	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3	2 $\frac{3}{4}$
Paso 5	$\frac{1}{2}$ 1, 3	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3	2 $\frac{3}{4}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
1,3	1	3
2	2,3	2
		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3	
Paso 2	1, 3 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 2, 3	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	$\frac{1}{2}$ 1, 3	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{3}{4}$
Final	$\frac{1}{2}$ 1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 1, 2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	3, 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

	1	2	3		A	B	C
							
$1/2$	A	$1/4$ B	$1/4$ B		1	2, 3	
$1/2$	B	$3/4$ C	$1/2$ A		1, 3	$2, 3$	2
	C	A	$1/4$ C		$1/2$	$1/2$	$1/2$
					1, 3	1, 2, 3	2
	1,3	1	3		$1/2$ $1/2$	$1/2$ $1/2$ $1/2$	$1/2$
	2	2,3	2		3, 1, 3	1, 2, 3	2
			1		$1/4$ $1/4$ $1/2$ $1/2$	$1/2$ $1/4$ $1/4$	$3/4$
					1, 3	1, 2, 3	3, 2
					$1/2$ $1/2$	$1/2$ $1/4$ $1/4$	$1/4$ $3/4$
Paso 1							
Paso 2							
Paso 3							
Paso 4							
Final							

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional



1	2	3
A	B	B
B	C	A
C	A	C



3	1	3
1	2,3	2
2		1



Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C

A	B	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

Paso 1

A	B	C
		
1	2, 3	

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional



1	2	3
A	B	B
B	C	A
C	A	C



A	B	C
3	1	3
1	2,3	2
2		1



Paso 1

A	B	C
1	2,3	

Red arrows point from '2,3' to '2' and '3' with labels '1/2' and '1/2' respectively.

Paso 2

A	B	C
1	2,3	
	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional



1	2	3
A	B	B
B	C	A
C	A	C



A	B	C
3	1	3
1	2,3	2
2		1



Paso 1

1

~~2,3~~
1/2 1/2

Paso 2

1

2,3
1/2 1/2

2
1/2

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional



1	2	3
A	B	B
B	C	A
C	A	C



3	1	3
1	2,3	2
2		1



Paso 1

1

~~2,3~~
1/2 1/2

Paso 2

3,1
1/2

2,3
1/2 1/2

2
1/2

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional



1	2	3
A	B	B
B	C	A
C	A	C



A	B	C
3	1	3
1	2,3	2
2		1



Paso 1

A	B	C
1	2,3	

Paso 2

A	B	C
3,1	2,3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
Paso 2	3, 1 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
Paso 2	3, 1 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1, 2, 3 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	2 $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

Paso 1

Paso 2

Paso 3

A	B	C
		
1	2,3	
	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
3,1	2,3	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1,3	1,2,3	2
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
Paso 2	3, 1 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1, 2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
Paso 2	3, 1 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	1, 2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
Paso 2	3, 1 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	1, 2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3	
		$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
Paso 2	3, 1	2, 3	2
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3	1, 2, 3	2
	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3	1, 2, 3	2, 2
	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
Paso 2	3, 1 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	1, 2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2, 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$
Paso 5	1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$	1, 2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{3}{4}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
Paso 2	3, 1 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	1, 2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2, 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$
Paso 5	1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$	1, 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{3}{4}$

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

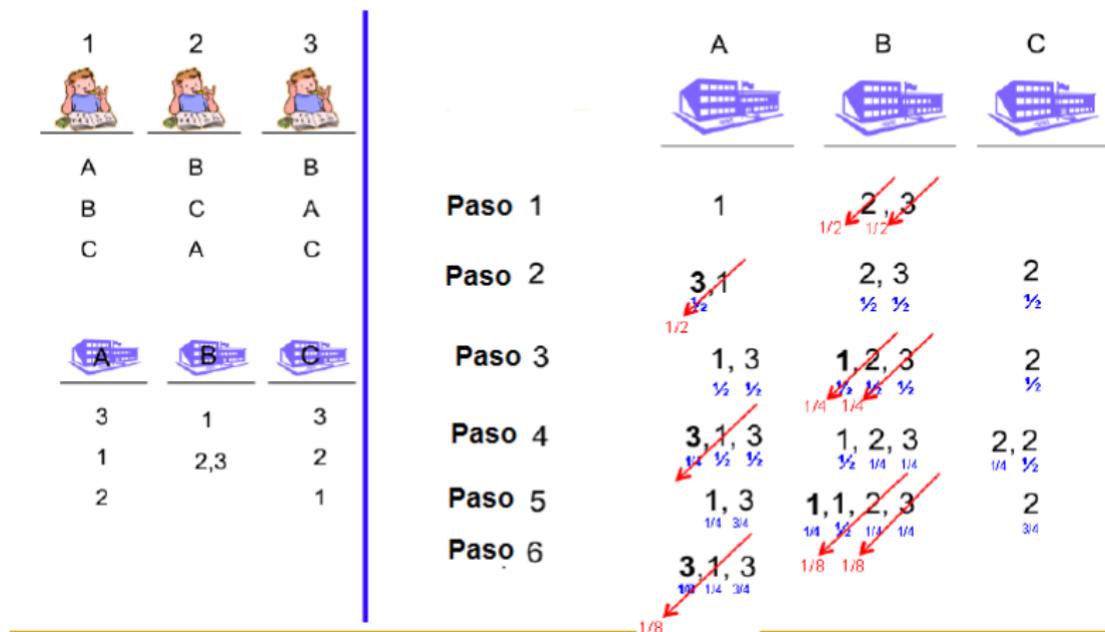
	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
Paso 2	3, 1 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	1, 2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2, 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$
Paso 5	1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$	1, 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{3}{4}$
		$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$	

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

1	2	3
		
A	B	B
B	C	A
C	A	C
		
3	1	3
1	2,3	2
2		1

	A	B	C
			
Paso 1	1	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
Paso 2	3, 1 $\frac{1}{2}$	2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 3	1, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
Paso 4	3, 1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	1, 2, 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2, 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$
Paso 5	1, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$	1, 1, 2, 3 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	2 $\frac{3}{4}$
Paso 6	3, 1, 3 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$	

Ejemplo: Aceptación diferida fraccional



Ejemplo: Aceptación diferida fraccional

