Un Modelo Estadístico en Estructuras de Conocimiento

Gabriel Muñoz Z.

Pontificia Universidad Católica de Chile

September 22, 2017

Resumen

Resumen charla:

- Resumen Espacios de Conocimiento, Espacios de Aprendizaje
- Teorema de Birkohff
- Modelo Probabilístico General
- Modelo Estadístico

Definiciones

Definición: Dado un dominio Q y una colección de subconjuntos $\mathcal{K}$ tal que $\emptyset, Q \in \mathcal{K}$. El par $(Q, \mathcal{K})$ se llama una **Estructura de Conocimiento**.

Definición: Una estructura de conocimiento cerrada por unión se llama un **Espacio de Conocimiento.**

Definición: Un espacio de conocimiento cerrado por intersección, es un espacio de conocimiento cuasiordinal.

Resultados Generales

- Teorema de Birkhoff 1: Existe una correspondencia biunívoca entre todos los espacios de conocimiento cuasiordinales con dominio Q y todos los cuasiórdenes en Q.
- Teorema de Birkhoff 2: Existe una correspondencia biunívoca entre todos los espacios de conocimiento con dominio Q y todos los entailments en Q.

Un entailment R en un conjunto Q es una relación entre $2^Q - Q$ y Q que cumple:

- $p \in A \subseteq Q \implies ARp$
- Para $\emptyset \neq A, B \subseteq Q, p \in Q$ se tiene: $((\forall b \in B \implies ARb) \wedge (BRp)) \implies ARp$

Formulación

En una estructura de conocimiento $(Q, \mathcal{K})$, definiremos las siguientes funciones de probabilidad:

- $p : \mathcal{K} \to [0, 1]$ la probabilidad del estado $K \in \mathcal{K}$
- $P : 2^Q \to [0, 1]$ la probabilidad del patrón de respuesta $R \in 2^Q$
- $\rho : 2^Q \times \mathcal{K} \to [0, 1]$ la probabilidad condicional de obtener el patrón de respuesta $R \in 2^Q$ dado que el examinado se encuentra en el estado $K \in \mathcal{K}$.

Por el Teorema de Probabilidad Total, tenemos

$$P(R) = \sum_{K \in \mathcal{K}} \rho(R, K) \cdot p(K)$$

Además, para cada $q \in Q$ definimos β_q y η_q como el error involuntario y el parámetro de *guessing* del ítem q respectivamente.

Axioma de Independencia Local

Asumiendo el Axioma de Independencia Local, obtenemos:

$$\rho(R, K) =$$

$$\left[\prod_{q \in K-R} \beta_q\right] \left[\prod_{q \in K \cap R} (1 - \beta_q)\right] \left[\prod_{q \in R-K} \eta_q\right] \left[\prod_{q \in (K \cup R)^c} (1 - \eta_q)\right]$$

Por lo tanto, tenemos:

$$P(R) = f(\beta, \eta, p)$$

R es un patrón de respuestas, β, η son parámetros de los ítems y p es una función de probabilidad en el espacio de estados $\mathcal{K}$. Específicamente, el modelo estadístico es:

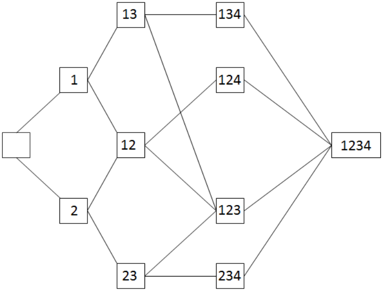
$$(2^Q, (\beta, \eta, p))$$

En lo que sigue, se presentará un modelamiento para p.

Ejemplo

Podremos hacer referencia al siguiente ejemplo:

$$
\begin{aligned}
Q &= \{1,2,3,4\} \\
\mathcal{K} &= \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \\
&\quad \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}
\end{aligned}
$$



Modelo 1: Para cada ítem q existirá un parámetro $g_q \in [0,1]$ tal que:

$$p(K) = \begin{cases} \prod_{r\in S(K)}(1-g_r) & K=\emptyset \\ \prod_{q\in K} g_q & K=Q \\ \prod_{r\in S(K)}(1-g_r)\cdot\prod_{q\in K} g_q & K\neq Q,\emptyset \end{cases}$$

donde $S(K)$: *Outer Fringe of* K

Definición: Si $(Q, \mathcal{K})$ es una estructura, bien graduada. J es un estado de acceso al estado K si:

$$J \subseteq K \subseteq J \cup S(J)$$

Además, si $m = |K - J|$, entonces J se llamará un $m-$acceso (de J a K). Si m es el entero más grande tal que K tiene un $m-$acceso J, entonces J es un **acceso inicial** de K.

En nuestro ejemplo, tomemos la suma de todas las probabilidades:

$$
\begin{aligned}
&(1-g_1)(1-g_2)\\
&+g_1(1-g_2)(1-g_3)\\
&+g_2(1-g_1)(1-g_3)\\
&+g_1g_3(1-g_2)(1-g_4)\\
&+g_1g_2(1-g_3)(1-g_4)\\
&+g_2g_3(1-g_1)(1-g_4)\\
&+g_1g_3g_4(1-g_2)\\
&+g_1g_2g_4(1-g_3)\\
&+g_1g_2g_3(1-g_4)\\
&+g_2g_3g_4(1-g_1)\\
&+g_1g_2g_3g_4
\end{aligned}
$$

Es posible que esta suma no sea igual a 1. (En tal caso, no sería una probabilidad!)

Teorema Si todo estado de una estructura de conocimiento bien graduada, finita, tiene la misma cantidad de accesos pares que impares, entonces la función p definida anteriormente, define una función de probabilidad.

Teorema En un Espacio de Conocimiento finito, bien graduado, todo estado no vacío tiene el mismo número de estados pares que impares. Además, por lo tanto, la función p definida anteriormente siempre define una función de probabilidad en ese espacio.

Referencias

- Falmagne, J. C. (1994). *Finite markov learning models for knowledge structures. Contributions to mathematical psychology, psychometrics, and methodology*, 75-89.
- Falmagne, J. C., & Doignon, J. P. (2010). *Learning spaces: Interdisciplinary applied mathematics.* Springer Science & Business Media.
- Falmagne, J. C., & Doignon, J. P. (1988). *A class of stochastic procedures for the assessment of knowledge.* British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 41(1), 1-23.