Algoritmo de Koppen (QUERY)

Rodrigo Vargas

14 de julio de 2017

Sea Q el dominio, es decir, el conjunto completo de problemas bajo consideración:

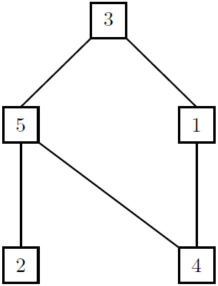
1. Multiplicar dos binomios.
2. Identificar y representar puntos en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométricos.
3. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente.
4. Fracciones equivalentes.
5. Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.

La primera formalidad que viene a la mente se basa en la idea de que, desde la observación de que un estudiante es capaz de resolver un problema dado, a veces se puede conjeturar que este estudiante también puede resolver otros problemas. Esto sugiere la introducción de una relación binaria $\precsim$, con la siguiente interpretación:

$$q \precsim t \iff \text{de una respuesta correcta al problema } t; \text{ podemos suponer una respuesta correcta al problema } q.$$

Acortar esto como q se puede deducir de t, o bien se dice que q precede a t. La relación $\precsim$ se llamará la relación de precedencia. Esta relación es obviamente reflexiva, y es razonable suponer que también es transitiva. En otras palabras, es un cuasi-orden en el conjunto Q.

Una relación de precedencia $\precsim$ para nuestros cinco problemas se muestra en la Figura 1. Las convenciones de la figura (conocido como un diagrama de Hasse en la teoría de los grafos) son los siguientes. Cuando se puede llegar a algún problema q desde algún otro problema t por líneas descendentes, esto significa q se puede deducir de t; Es decir, $q \precsim t$.



Formalmente, la definición del estado de conocimiento correspondiente a la relación de precedencia $\precsim$ es

$$K \subseteq Q \text{ es un estado} \iff \text{para todo } q, t \in Q,\ q \precsim t, \text{ y } t \in K \Rightarrow q \in K.$$

En un lenguaje sencillo: Un conjunto K de problemas es llamado un estado si, cuando K contiene algún problema t, también contiene todos los problemas que se pueden deducir de t.
La relación de precedencia $\precsim$ satisface la condición de antisimetría $q \precsim t$ y $t \precsim q \Rightarrow q = t$. Un cuasi-orden que también es antisimétrico se denomina un orden parcial.

En nuestro ejemplo, denota por $\mathcal{K}$ la estructura de conocimiento, obtenemos

$$\mathcal{K} = \{\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{2,4,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\} .$$

Observe que la colección de estados satisface la propiedad siguiente:

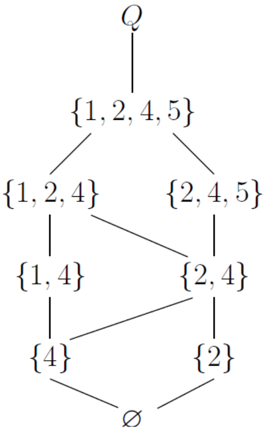
Si K y K' son estados, entonces $K \cup K'$ es también un estado.

Por ejemplo, tenemos los dos estados $\{2,4\}$ y $\{1,4\}$, pero también tenemos el estado $\{1,2,4\} = \{2,4\} \cup \{1,4\}$. Una familia de estados que satisfacen esta propiedad será llamada unión cerrada, o $\cup$-cerrada.

Otra propiedad, en el mismo sentido pero que implica intersecciones, requiere que

Si K y K' son estados, entonces $K \cap K'$ es también un estado.

Si esta propiedad es válida para una familia de estados, decimos que es intersección cerrada, o $\cap$-cerrada. Es fácil verificar que la familia de estados $\mathcal{K}$ de nuestro ejemplo es $\cup$-cerrada y $\cap$-cerrada.


Q
$\{1, 2, 4, 5\}$
$\{1, 2, 4\}$
$\{2, 4, 5\}$
$\{1, 4\}$
$\{2, 4\}$
$\{4\}$
$\{2\}$
$\varnothing$

Este ejemplo ilustra una situación general, que puede describirse en términos del siguiente resultado clásico.

Teorema (Birhhoff,1937)

Para cualquier conjunto Q, la fórmula

$$q \precsim t \Leftrightarrow (t \in K \Rightarrow q \in K, \text{ para todo } K \in \mathcal{K}) \tag{1}$$

Establece una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de todos los cuasi-ordenes $\precsim$ en Q, y la colección de todas las familias $\mathcal{K}$ de los subconjuntos de Q que son $\cup$-cerrado y $\cap$-cerrado.

En otras palabras: Para cualquier relación de precedencia $\precsim$ sobre el conjunto Q, que es reflexiva y transitiva, hay exactamente una familia de estados y que es $\cup$-cerrada y $\cap$-cerrado, y viceversa.

Preguntas a Expertos

[Q1] Supongamos que un estudiante bajo examen acaba de proporcionar una respuesta incorrecta al problema q_1. ¿Es prácticamente cierto que este estudiante también fallará el problema q_2? Suponemos que se excluyen los errores por descuidos y las conjeturas afortunadas.

Para propósitos expositivos, simplificamos esto a la pregunta: ¿Fallando q_1 implica fallar q_2?
Notación: codificaremos respuestas positivas y negativas a preguntas tales como APq y ANq, respectivamente.
La pregunta anterior define una relación de precendencia de la siguiente manera:

$$q \precsim t \Leftrightarrow \{q\}Pt \tag{2}$$

En general se utiliza una pregunta más general para adquirir información del experto:

> [Q2] Supongamos que un estudiante bajo examen ha proporcionado respuestas equivocadas a todos los problemas en un subconjunto A de Q. ¿Es prácticamente cierto que este estudiante también fallará el problema q en Q? Asumimos que los errores por descuidos y suposiciones con suerte están excluidos.

Una respuesta positiva a la pregunta: ¿El fracaso de 1 y 3 implica fallar 2? Será denotado por $\{1,3\}P2$. Se puede establecer matemáticamente que, si todas las preguntas de tipo [Q2] se les pide, entonces el espacio de conocimiento puede ser recuperado exactamente.

Nuestro primer paso consiste en ordenar las preguntas que deben hacerse a los expertos; es decir, tenemos que ordenar los pares (A, q) que corresponden a las preguntas: ¿falla todos los problemas en A implica fallar el problema q?, es razonable comenzar con las preguntas más simples. El orden de preguntas por el tamaño del conjunto A en el par (A, q). Luego, decimos que (A, q) está antes que (A', q') cuando $|A| < |A'|$. (Aquí, y en lo que sigue, denotamos por $|S|$ el número de elementos en un conjunto S.) Esto significa que todas las preguntas de tipo [Q1] serán preguntadas en la primera etapa del procedimiento.

Conteo

1. Si $q \in A$ entonces APq, el conteo de estas respuestas positivas a priori es fácil de hacer
2. Si el número de problemas en Q es n (es decir, si $|Q| = n$) entonces el número de este tipo de preguntas es $2^{n-1} \times n$. En nuestro caso, con 5 problemas se tiene 80 preguntas positivas, que no es necesario realizar.
3. El número de preguntas de la forma ARq con $|A| = 1$ es $(n-1) \times n$.
4. El número de preguntas de la forma ARq con $|A| = k > 1$ es $\binom{n}{k} \times (n-k)$.
5. En total, el número de preguntas necesarias para determinar el espacio de conocimiento es $(2^{n-1} - 1) \times n$. En nuestro caso, con 75 preguntas es posible determinar el espacio de conocimiento.

Ejemplos de inferencias

1. Si $q \in A$ entonces la pregunta (A, q) no debe ser realizada ya que es claro que APq.
2. Transitividad: Por ejemplo, a partir de $\{a\}Pb$, $\{b\}Pc$ podemos inferir que $\{a\}Pc$.
3. La transitividad de la relación P restringuida a pares de items también permite inferir a partir de respuestas negativas. Por ejemplo si $\{a\}Pb$ y $\{a\}Nc$, entonces el algoritmo no debe preguntarse si fallar b implica fallar c ya que por lo anterior, una respuesta positiva llevaría a inferir que $\{a\}Pc$, contradiciendo $\{a\}Nc$.

Ejemplos de inferencias (continuación)

1. Las inferencias se pueden generalizar cuando se realizan preguntas del tipo [Q2].
2. El teorema de Birhhoff permite realizar inferencias que eliminan estados admisibles.
   Por ejemplo, si $\{a\}Pb$ entonces se deben eliminar todos los estados que K en los cuales $b \in K$ y $a \notin K$.

En la siguiente tabla se tiene que la primera columna indica el número de paso; la segunda columna enumera la respuesta observada en el número de paso actual; la tercera columna contiene las inferencias negativas extraídas de la respuesta observada (incluida la respuesta en sí, si es negativa); la cuarta columna contiene las inferencias positivas extraídas de la respuesta observada (incluida la respuesta en sí); la quinta columna muestra qué estados se suprimen del espacio de conocimiento actual si se obtiene una respuesta positiva; la sexta columna contiene el número actual de respuestas negativas e inferencias; y la séptima columna contiene el número actual de respuestas positivas e inferencias. Los guiones indican que no se agrega ni se elimina nada.

Tabla 1
Pasos del procedimiento para interrogar al experto

Paso	Respuesta	Pares agregados a N_t	Pares agregados a P_t	Estados de conomiento eliminados de $\mathcal{K}$	$\lvert N_t\rvert$	$\lvert P_t\rvert$
1	1N2	1N2	-	-	1	80
2	1P3	3N2, {1,3}N2	{1,2}P3, {1,4}P3, {1,5}P3, {1,2,4}P3, {1,2,5}P3, {1,4,5}P3, {1,2,4,5}P3	{3}, {2,3}, {3,4},{3,5}, {2,3,4}, {2,3,5}, {3,4,5}, {2,3,4,5}	3	88
3	1N4	1N4	-	-	4	88
4	1N5	1N5	-	-	5	88
5	2N1	2N1	-	-	6	88

Paso	Respuesta	Pares agregados a N_t	Pares agregados a P_t	Estados de conomiento eliminados de $\mathcal{K}$	$\lvert N_t \rvert$	$\lvert P_t \rvert$
6	2P3	3N1, {2,3}N1	2P3, {2,4}P3, {2,5}P3, {2,4,5}P3,	{1,3}, {1,3,4}, {1,3,5}, {1,3,4,5}	8	92
7	2N4	2N4	-	-	9	92
8	2P5	5N4, 5N1, {2,5}N4, {2,5}N1	2P5, {1,2}P5, {2,3}P5, {2,4}P5, {1,2,3}P5, {1,2,4}P5, {2,3,4}P5, {1,2,3,4}P5	{5}, {1,5}, {4,5}, {1,4,5}	13	100
9	3N4	3N4	-	-	14	100
10	3N5	3N5	-	-	15	100

Paso	Respuesta	Pares agregados a N_t	Pares agregados a P_t	Estados de conomiento eliminados de $\mathcal{K}$	$\|N_t\|$	$\|P_t\|$
11	4P1	-	4P1, {2,4}P1, {3,4}P1, {4,5}P1, {2,3,4}P1, {3,4,5}P1, {2,4,5}P1, {2,3,4,5}P1	{1}, {1,2}, {1,2,3}, {1,2,5}, {1,2,3,5}	15	108
12	4N2	4N2	-	-	16	108
13	4P3	{3,4}N2	4P3, {4,5}P3		17	110
14	4P5	5N2, {4,5}N2	4P5, {1,4}P5, {3,4}P5, {1,3,4}P5	{2,5}	19	114
15	5P3	-	5P3	{1,2,3,4}	19	115

Paso	Respuesta	Pares agregados a N_t	Pares agregados a P_t	Estados de conomiento eliminados de $\mathcal{K}$	$\|N_t\|$	$\|P_t\|$
16	{1,2}N4	{1,2}N4	-	-	20	115
17	{1,3}N4	{1,3}N4	-	-	21	115
18	{1,3}N5	{1,3}N5	-	-	22	115
19	{1,4}N2	{1,4}N2	-	-	23	115
20	{2,3}N4	{2,3}N4	-	-	24	115
21	{3,5}N1	{3,5}N1	-	-	25	115
22	{3,5}N2	{3,5}N2	-	-	26	115
23	{3,5}N4	{3,5}N4	-	-	27	115
24	{1,5}N2	{1,5}N2	-	-	28	115
25	{1,5}N4	{1,5}N4	-	-	29	115
26	{1,2,3}N4	{1,2,3}N4	-	-	30	115
27	{1,2,5}N4	{1,2,5}N4	-	-	31	115
28	{2,3,5}N1	{2,3,5}N1	-	-	32	115

Paso	Respuesta	Pares agregados a N_t	Pares agregados a P_t	Estados de conomiento eliminados de $\mathcal{K}$	$\lvert N_t \rvert$	$\lvert P_t \rvert$
29	{2,3,5}N4	{2,3,5}N4	-	-	33	115
30	{3,4,5}N2	{3,4,5}N2	-	-	34	115
31	{1,3,4}N2	{1,3,4}N2	-	-	35	115
32	{1,4,5}N2	{1,4,5}N2	-	-	36	115
33	{1,3,5}N2	{1,3,5}N2	-	-	37	115
34	{1,3,5}P4	{1,3,5}P4	-	-	38	115
35	{1,3,4,5}N2	{1,3,4,5}N2	-	-	39	115
36	{1,2,3,5}N4	{1,2,3,5}N4	-	-	40	115

Algunos ejemplos de items.

Dos ejemplos entre 10 de itemes fáciles:

1. Sumar: $34 + 21 = ?$
2. ¿Cuál es el producto cuando 3 es multiplicado por 5?
3. Escriba el número para doce mil treinta y siete.
4. En un triángulo ABC, la medida del ángulo A es 30 grados y la medida del ángulo B es 50 grados. ¿Cuál es la medida del ángulo C?
5. Sumar: $546 + 1,248 + 26 = ?$
6. Escriba la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,0)$ y $(3,6)$
7. Resuelva para x:

$$\frac{2x+1}{5} + \frac{3x-7}{2} = 7\,.$$

8. ¿Cuál es l producto de $6x^3$ y $12x^4$?

a. $\begin{array}{r} 318 \\ \times 605 \\ \hline ? \end{array}$	**b.** $58.7 \times 0.97 = ?$
c. $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = ?$	**d.** What is 30% of 34 ?

Suppose that a student under examination has just provided a wrong response to problems **a**, **b**, **c** and **d**.

e. Gwendolyn is $\frac{3}{4}$ as old as Rebecca
Rebecca is $\frac{2}{3}$ as old as Edwin
Edwin is 20 years old.
How old is Gwendolyn?

Is it practically certain that this student will also fail Problem **e**? **Rating:**