Capítulo 3. Espacios de Conocimiento

Rodrigo Vargas

22 de septiembre de 2016

3.2 Generación de espacios de conocimientos mediante consulta a expertos

Definición

- Una estructura de conocimiento es un par $(Q, \mathcal{K})$ en el cual Q es un conjunto no vacío, y $\mathcal{K}$ es una familia de subconjuntos de Q, que contiene al menos a Q y el conjunto vacío $\varnothing$.
- Decimos que una estructura de conocimiento $(Q, \mathcal{K})$ es un espacio de conocimiento si es cerrado bajo unión.

Consulta a expertos

[Q1] Suponga que un estudiante en un examen responde incorrectamente los items $q_1, q_2, \ldots, q_n$.
¿Es posible que el estudiante también falle el ítem q_{n+1}?

Las respuestas a todas estas preguntas definen una relación $\mathcal{R}$ para conjuntos en $2^Q \setminus \{\varnothing\}$:

$$A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{responder incorrectamente todos los items de } A \\ \text{implica fallar todos los ítems de } B. \end{cases}$$

Teorema

Sean Q un conjunto no vacío y la familia

$$\mathcal{S} = \{K \in 2^Q \mid \forall\,(A,B) \in \mathcal{R} \;:\; A \cap K = \varnothing \Longrightarrow B \cap K = \varnothing\}$$

Entonces $\mathcal{S}$ es un espacio de conocimiento.

La relación $\mathcal{R}$ es fundamental para la construcción de espacios de aprendizaje tal como se verá en el capítulo 16.

Observación. En el caso en que conjuntos considerables de datos de los estudiantes estén disponibles, podemos construir la relación $\mathcal{R}$ mediante: $A\mathcal{R}B$ si y sólo si

$$\mathbb{P}(\text{responder incorrectamente todos los ítems de } B \mid \text{todos los ítems de } A \text{ se respondieron incorrectamente}) > \alpha\ ,$$

donde $\mathbb{P}$ denota la medida de probabilidad, y α es un parámetro elegido convenientemente. Esta probabilidad puede estimarse a partir de las frecuencias relativas calculadas a partir de datos de los estudiantes.

3.3 Espacios Cerrados

Si $(Q, \mathcal{K})$ es una estructura de conocimiento, se define la estructura de conocimiento dual

$$\overline{\mathcal{K}} = \{K \in 2^Q \mid Q \setminus K \in \mathcal{K}\}\,.$$

Definición

- Decimos que $(Q, \mathcal{L})$ es un espacio cerrado cuando $\mathcal{L}$ es una familia de subconjunto de Q que contiene a Q y es cerrada bajo intersección.
- Un espacio cerrado es llamado simple cuando $\varnothing$ está en $\mathcal{L}$.

Proposición

$\mathcal{K}$ es un espacio de conocimiento en Q si y sólo si $\overline{\mathcal{K}}$ es un espacio cerrado simple.

3.4 Bases y Átomos

Definición

Sea $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ una familia de conjuntos.
El conjunto generado por $\mathcal{F}$ es

$$\mathcal{F}' = \left\{ \bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda \mid A_\alpha \in \mathcal{F} \right\}$$

Notación: $\mathbb{S}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ y decimos que $\mathcal{F}$ genera a $\mathcal{F}'$.

Por definición $\mathbb{S}(\mathcal{F})$ es $\cup$-cerrado.

Definición

Una base de una familia $\mathcal{K}$ $\cup$-cerrada es una subfamilia mínima $\mathcal{B}$ de $\mathcal{K}$ que genera a $\mathcal{K}$.

En la definición anterior, "mínimo" quiere decir con respecto a la inclusión de conjuntos:
Si $\mathbb{S}(\mathcal{H}) = \mathcal{K}$ para algún $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{H} = \mathcal{B}$.
Por convención, el conjunto vacío nunca pertenece a una base.

Teorema

Sea $\mathcal{B}$ una base para un espacio de conocimiento $(Q, \mathcal{K})$.
Si $\mathbb{S}(\mathcal{F}) = \mathcal{K}$ entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

En otras palabras, un espacio de conocimiento admite a lo más una base.

Teorema

Cualquier espacio de conocimiento esencialmente finito tiene una base

Definición

- Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de conjuntos. Para cualquier $q \in \cup\mathcal{F}$, una átomo en q es un conjunto mínimo de $\mathcal{F}$ que contiene a q.
- Un conjunto $X \in \mathcal{F}$ es llamado un *átomo* si es un átomo en q para algún $q \in \cup\mathcal{F}$.

Ejemplo 1 En el espacio $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, el estado $\{b, c\}$ es un átomo en b y también un átomo en c. Hay dos átomos en b a saber, $\{a, b\}$ y $\{b, c\}$. Sólo hay un átomo en a, el cual es $\{a\}$. (Sin embargo, a también pertenece al átomo $\{a, b\}$, pero el estado $\{a, b\}$ no es un átomo en a.)

Teorema

Un estado K en un espacio de conocimiento $(Q, \mathcal{K})$ es un átomo si y sólo si $K \in \mathcal{F}$ para cualquier subfamilia de estados $\mathcal{F}$ que satisface $K = \cup\mathcal{F}$.

Teorema

Supongamos que un espacio de conocimiento tiene una base. Entonces esta base está formada por la colección de todos los átomos.

Un algoritmo para determinar la base

Supongamos que el dominio Q es finito.
Enumere los ítems de Q de manera arbitraria $q_1, q_2, \ldots, q_m$.
Enumere los estados $K_1, \ldots, K_n$ de tal manera que si $K_i \subset K_j$ implique $i < j$.
Forme una matriz $T = (T_{ij})$ de $n \times m$ con las filas representando estados y columnas representando ítems.
Cada entrada T_{ij} tiene uno de los siguientes símbolos $*$, $+$ o $-$.
Inicialmente T_{ij} tiene el símbolo $*$ si el estado K_i contiene el item q_j, en caso contrario tiene el símbolo $-$.
El algoritmo inspecciona las filas $i = 1, 2, \ldots, n$ y transforma cualquier valor $*$ en $+$ si existe un índice p con $1 \leqslant p < i$, el estado K_p contiene el item q_j y $K_p \subset K_i$. Los átomos son los estados K_i para los cuales la fila i tiene al menos un $*$.

Ejemplo 2 Considere el espacio $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$. Tenemos que

$$\begin{array}{r|ccc} & a & b & c \\ \hline \varnothing & - & - & - \\ \{a\} & * & - & - \\ \{a,b\} & * & * & - \\ \{b,c\} & - & * & * \\ \{a,b,c\} & * & * & * \end{array} \Longrightarrow T = \begin{bmatrix} - & - & - \\ * & - & - \\ * & * & - \\ - & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Aplicando el algoritmo obtenemos

$$\begin{array}{r|ccc} & a & b & c \\ \hline \varnothing & - & - & - \\ \{a\} & * & - & - \\ \{a,b\} & + & * & - \\ \{b,c\} & - & * & * \\ \{a,b,c\} & + & + & + \end{array} \Longrightarrow \text{La base de } \mathcal{K} \text{ es } \mathcal{B} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{b.c\}\}.$$

Un algoritmo para general el espacio a partir de la base

Sea $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_p\}$ la base del espacio de conocimiento $(Q, \mathcal{K})$.

1. Inicialmente $\mathcal{G} = \{\varnothing\}$.
2. Para cada paso $i = 1, 2, \ldots, p$ realice lo siguiente
   (a) Iniciamos con $\mathcal{H} = \varnothing$.
   (b) Para cada $G \in \mathcal{G}$, compruebe si:

   $$\boxed{B_i \nsubseteq G \text{ y } \forall\, D \in \{B_1, \ldots, B_{i-1}\} : D \subseteq G \cup B_i \Longrightarrow D \subseteq G.} (*)$$

   Si la condición $(*)$ se satisface incluya a $G \cup B_i$ en $\mathcal{H}$.
   (c) Cuando todos los conjuntos G de $\mathcal{G}$ hayan sido considerados, reemplace $\mathcal{G}$ por $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$.
3. La familia $\mathcal{G}$ obtenida después del paso p es el espacio deseado $\mathcal{K}$.

Ejemplo 3 Para la base $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$ la siguiente tabla establece los sucesivos valores de $\mathcal{G}$.

Pasos	elementos de la base	Estados en $\mathcal{G}$
Inicio		$\emptyset$
1	$\{a\}$	$\emptyset, \{a\}$
2	$\{a,b\}$	$\emptyset, \{a\}, \{a,b\}$
3	$\{b,c\}$	$\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

Ejemplo 4 Para la base $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{b,c,e\}\}$, hemos construido una tabla solo con los elementos de la base y los estados adicionales producidos.

elementos de la base	Estados en $\mathcal{H}$
	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b,d\}$	$\{b,d\}, \{a,b,d\}$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}$
$\{b,c,e\}$	$\{b,c,e\}, \{a,b,c,e\}, \{b,c,d,e\}, \{a,b,c,d,e\}$