Definición

Sea $(Q, \mathcal{K})$ un espacio de conocimiento.
Diremos que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{K}$ si

- $\mathbb{S}(\mathcal{B}) = \mathcal{K}$.
- Si $\mathbb{S}(\mathcal{H}) = \mathcal{K}$ para algún $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{H} = \mathcal{B}$.

Lema

Sea $\mathcal{B}$ una base del espacio de conocimiento $(Q, \mathcal{K})$.
Si $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{B}$ entonces $B_1 \neq B_2 \cup B_3$.
Similarmente, un estado en $\mathcal{B}$ no puede ser la unión de cualquier subfamilia de $\mathcal{B}$.

Demostración.

Supongamos que $B_1 = B_2 \cup B_3$. Considere $\mathcal{H} = \mathcal{B} \setminus \{B_1\}$, entonces $\mathbb{S}(\mathcal{H}) = \mathcal{K}$ con $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$ y se sigue que $\mathcal{H} = \mathcal{B}$, lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema

Sea $\mathcal{B}$ una base del espacio de conocimiento $(Q, \mathcal{K})$.
Si $\mathbb{S}(\mathcal{F}) = \mathcal{K}$ entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

En otras palabras, un espacio de conocimiento admite a lo más una base.

Demostración.

Supongamos que $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{F}$. Entonces, existe $K \in \mathcal{B}$ tal que $K \notin \mathcal{F}$.
Como $\mathbb{S}(\mathcal{F}) = \mathcal{K}$ entonces $K = \bigcup F_k$ donde $F_k \in \mathcal{F}$.
Como $\mathcal{B}$ es base, para cada k tenemos $F_k = \bigcup B_j$ donde $B_j \in \mathcal{B}$.
Se sigue que $K = \bigcup(\bigcup B_j) = \bigcup B_\ell$ con $B_\ell \in \mathcal{B}$, lo cual contradice el lema. $\square$

La relación de precedencia

Definición

Sea (Q, K) una estructura de conocimiento.
Dados $r, q \in Q$, definimos la relación

$$r \precsim q \Longleftrightarrow r \in \cap \mathcal{K}_q$$

Cuando $r \precsim q$ diremos que r precede a q.

$$r \precsim q \Longleftrightarrow \mathcal{K}_r \supseteq \mathcal{K}_q \ .$$

Ejemplo Considere la estructura de conocimiento

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,e\}, \\ &\quad \{a,b,c,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,d,e\}\}\end{aligned}$$

Tenemos que $\cap\mathcal{K}_d = \{a,b,c,d\} \cap \{a,b,c,d,e\} = \{a,b,c,d\}$ luego $c \in \cap\mathcal{K}_d$ es decir $c \precsim d$. Similarmente $a \precsim d$, $b \precsim d$.

Teorema

La relación de precedencia de una estructura de conocimiento es un cuasi-orden.
Cuando la estructura de conocimiento es discriminativa, este cuasi-orden es un orden parcial.

Recuerde:

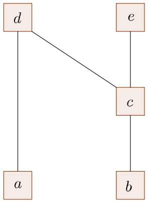
1. Un cuasi-orden es cualquier relación que es transitiva y reflexiva.
   - Reflexiva: $r \precsim r$.
   - Transitiva: Si $r \precsim q$ y $q \precsim s$ entonces $r \precsim s$.
2. Un cuasi-orden antisimétrico es un orden parcial.
   - antisimétrico: si $r \precsim q$ y $q \precsim r$ entonces $r = q$.
3. Una estructura de conocimiento es llamada discriminativa si cada noción satisface $q^* = \{q\}$.

$$q^* = \{r \in Q \mid \mathcal{K}_q = \mathcal{K}_r\}.$$

Ejemplo Considere la estructura de conocimiento del ejemplo anterior

$$\begin{aligned}\mathcal{K} \quad = \quad & \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, e\}, \\ & \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}\end{aligned}$$

$\mathcal{K}$ es discriminativa, entonces la relación de precedencia es un orden parcial, esto nos permite construir un diagrama (llamado diagrama de Hesse) con la relación de precedencia



Definición

Un espacio de conocimiento cerrado bajo intersección es llamado un espacio cuasi ordinal.

Teorema

Sean $(Q,\mathcal{K})$ y $(Q,\mathcal{K}')$ espacios cuasi ordinales. Entonces

$$(\forall\, q,s \in Q \ : \ \mathcal{K}_q \subseteq \mathcal{K}_s \Longleftrightarrow \mathcal{K}'_q \subseteq \mathcal{K}'_s) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}' \ .$$

Demostración.

Suponga que $K \in \mathcal{K}$. Como el espacio $\mathcal{K}'$ es cerrado bajo intersecciones y uniones podemos definir el conjunto

$$K' = \bigcup_{q \in K} \left(\bigcap \mathcal{K}'_q \right)$$

Es claro que $K \subseteq K'$. Probaremos que $K = K'$.
En efecto, sea $s \in K'$ entonces por la definición del conjunto K' existe $q \in K$ tal que $s \in \cap \mathcal{K}'_q$. Tenemos

$$s \in \cap \mathcal{K}'_q \Longleftrightarrow \mathcal{K}'_q \subseteq \mathcal{K}'_s \Longleftrightarrow \mathcal{K}_q \subset \mathcal{K}_s \Longleftrightarrow s \in \cap \mathcal{K}_q \subset K.$$

ya que $q \in K$. □

Teorema. (Birkhoff, 1937)

Existe una correspondencia uno a uno entre la colección de todos los espacios cuasi ordinales $\mathcal{K}$ sobre un dominio Q, y la colección de todos los cuasi ordenes R sobre Q. La correspondecia es definida por las siguientes equivalencias

$$pRq \iff (\forall\, K \in \mathcal{K} \,:\, q \in K \Longrightarrow p \in K) \tag{1}$$

$$K \in \mathcal{K} \iff (\forall\, (p,q) \in R \,:\, q \in K \Longrightarrow p \in K) \tag{2}$$

Bajo esta correspondencia, espacios ordinales son transformados sobre ordenes parciales.

Note que la ecuación (1) puede ser escrita como

$$pRq \iff \mathcal{K}_p \supseteq \mathcal{K}_q \,.$$

El cuasi orden definido arriba en una estructura de conocimiento $\mathcal{K}$ es la relación de procedencia de $\mathcal{K}$.