Learning Spaces - Primera sesión

Gabriel Muñoz Z.

Pontificia Universidad Católica de Chile

May 10, 2017

Motivación e información del seminario

- Resumen temas revisados seminario LS2016
- Objetivos del seminario:
  - Aprender sobre la teoría general de Learning Spaces y Knowledge Spaces
  - Cuestionar la pertinencia de los métodos actuales de aprendizaje y medición.
  - Desarrollar las herramientas necesarias para la construcción de un KS a partir de un dominio Q.
- Planificación próximas sesiones. Definición de los capítulos a estudiar.

Dominio

Una “pregunta”, “problema” o “ítem” será una clase de ejercicios en la cual todos ellos se diferencian solo en detalles numéricos menores o en formulación de la pregunta. A los ejercicios que forman la clase se les llamará **instancias** del ítem.
Al conjunto de ítems de interés lo llamaremos “dominio”

Estructuras

- Un par $(Q, \mathcal{K})$ donde $\mathcal{K} \subset 2^Q$ es una *Estructura de Conocimiento*. A veces simplemente a la estructura de conocimiento la llamaremos $\mathcal{K}$.
- Una estructura de conocimiento $\mathcal{K}$ es un *Espacio de conocimiento* si $\mathcal{K}$ es cerrada por unión.
- Un espacio de conocimiento $\mathcal{K}$ es un *Espacio de aprendizaje* si:
  - $\forall K, L \in \mathcal{K}, K \subset L \implies$ $\exists \{K_i\}_{i=0}^{n} : ((\forall i \in \{0, ..., n-1\}, K_i \subset K_{i+1}) \wedge (|K_i - K_{i-1}| = 1))$
  - $\forall K, L \in \mathcal{K}, K \subset L$: $((q \in Q \wedge K \cup \{q\} \in \mathcal{K}) \implies (L \cup \{q\} \in \mathcal{K}))$
- Un espacio de conocimiento, es un *Espacio de conocimiento cuasiordinal* si es cerrado por intersección.

Un par más de definiciones

Sea $(Q, \mathcal{K})$ una estructura de conocimiento

- **Definición:** Si $q \in Q$, denotamos $\mathcal{K}_q = \{K \in \mathcal{K} : q \in K\}$
- **Definición:** Si $q \in Q$, denotamos $q^\star = \{r \in Q : \mathcal{K}_q = \mathcal{K}_r\}$

Si definimos $q \sim r \iff q^\star = r^\star$, esta es una relación de equivalencia. Un espacio es discriminativo si esta partición coincide con el espacio mismo (cada clase tiene un solo elemento).

Siempre podemos construir un espacio discriminativo.

Relación de precedencia

Definición: Sea $(Q, \mathcal{K})$ una estructura de conocimiento. Definamos $r \preceq q \iff r \in \cap \mathcal{K}_q (\iff \mathcal{K}_r \supseteq \mathcal{K}_q)$. La relación de precedencia.

Teorema: La relación de precedencia es un cuasi orden. Si la estructura es discriminativa, es un orden parcial.

Cuasi Orden: Relación refleja y transitiva
Orden Parcial: Cuasi orden antisimétrico

Espacios de conocimiento Cuasi Ordinales

Teorema: Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ dos espacios de conocimiento cuasi ordinales, entonces:

$$(\forall q, s \in Q : \mathcal{K}_q \subseteq \mathcal{K}_s \iff \mathcal{K}'_q \subseteq \mathcal{K}'_s) \iff \mathcal{K} = \mathcal{K}'$$

Teorema (Birkhoff, 1937): Existe una correspondencia biunívoca entre la colección de todos los espacios cuasiordinales $\mathcal{K}$ en Q y la colección de todos los cuasi órdenes órdenes $\mathcal{Q}$ en Q. Esta correspondencia está definida por:

$$p\mathcal{Q}q \iff (\forall K \in \mathcal{K} : q \in K \implies p \in K) \quad (1)$$

$$K \in \mathcal{K} \iff (\forall (p,q) \in \mathcal{Q} : q \in K \implies p \in K) \quad (2)$$

Obs: Ec. (1) puede escribirse como $P\mathcal{Q}q \iff \mathcal{K}_p \supseteq \mathcal{K}_q$

Problema

El problema de construir en la práctica un espacio de conocimiento consiste en que debemos seleccionar de la totalidad de subconjuntos $(2^{|Q|})$ aquellos que son posibles de alcanzar y descartar aquellos que no.

- $2^{10} = 1024$
- $2^{20} = 1.048.576$
- $2^{30} = 1.073.741.824$

ALEKS: 350 ítems

Solución 1

La primera solución consiste en encontrar estructuras relacionadas que permitan determinar el Espacio de conocimiento.

Otras alternativas incluyen combinar subespacios para formar uno más grande, o construirlo de forma empírica (probabilista).

Opinión de expertos

Q0: Suponga que un estudiante falla en responder el ítem p ¿Ud. cree que este estudiante también fallará en responder el ítem q?

Q1: Suponga que un estudiante ha fallado todos los ítem $\{p_1, ..., p_n\}$.
¿Ud. cree que este estudiante también fallará el ítem q?

Q0 es suficiente para construir un espacio de conocimiento $\mathcal{K}$ si asumimos que este espacio es cuasi ordinal. Esto, por el Teorema de Birkhof, dado que Q0 define un cuasi orden.

En caso contrario, debemos considerar Q1 (dejando de lado cerrado por intersección).

Entailment - Espacio de conocimiento

Definición: Una relación $\mathcal{P}$ de 2^Q a Q, se llama entailment si:

i) $p \in A \subseteq Q \implies A\mathcal{P}p$

ii) Para $\emptyset \neq A, B \subseteq Q, p \in Q$ se tiene:
$((\forall b \in B \implies A\mathcal{P}b) \wedge (B\mathcal{P}p)) \implies A\mathcal{P}p$

Definición: $\mathcal{K}$, un espacio de conocimiento y $\mathcal{P}$ un una relación de 2^Q a Q, entonces $\mathcal{K}$ y $\mathcal{P}$ se dicen consistentes (o derivado, uno de otro) si:

$$A\mathcal{P}q \iff (\forall K \in \mathcal{K} : A \cap K = \emptyset \implies q \notin K)$$

Observación: Si $\mathcal{K}$ y $\mathcal{P}$ son consistentes, entonces $\mathcal{P}$ es un entailment.

Teorema: Existe una correspondencia biunívoca entre la familia de todos los espacios de conocimiento $\mathcal{K}$ en un mismo dominio Q, y la familia de todos los entailment $\mathcal{P}$ para Q. Esta correspondencia se define a través de:

$$\begin{aligned} A\mathcal{P}p &\iff (\forall K \in \mathcal{K} : A \cap K = \emptyset \implies q \notin K) \\ K \in \mathcal{K}p &\iff (\forall (A,p) \in \mathcal{P} : A \cap K = \emptyset \implies p \notin K) \end{aligned}$$

El entailmente que consideraremos, $\mathcal{P}$ consiste en Q1. Las respuestas expertas se dirán consistentes con el espacio de conocimiento si el entailment asociado lo es.

Revisitamos la definición de entailment (teniendo en mente Q1):

i) $p \in A \subseteq Q \implies A\mathcal{P}p$

ii) Para $\emptyset \neq A, B \subseteq Q, p \in Q$ se tiene:
$((\forall b \in B \implies A\mathcal{P}b) \wedge (B\mathcal{P}p)) \implies A\mathcal{P}p$

y, la de consistencia:

$$A\mathcal{P}q \iff (\forall K \in \mathcal{K} : A \cap K = \emptyset \implies q \notin K)$$

Posibles próximas exposiciones

- Capítulo 7 (continuación - Meshability of K. Structures)
- Capítulo 8* - Galois Connection
- Capítulo 11 - Probabilistic Knowledge Structures
- Capítulo 12 - Stochastic Learning Paths
- Capítulo 13 - Uncovering the Latent State: A continuous Markov Procedure (Determinar el estado, revisar primero 15 y 16)
- Capítulo 14 - A Markov Chain Procedure
- Capítulo 15 - Building a Knowledge Space
- Capítulo 16 - Building a Learning Space
- Capítulo 17 - Analyzing the validity of an Assessment.